

# Approximation de données bruitées à l'aide d'éléments de Powell-Sabin

Juan Carlos Garcia Hernandez, Nicolas Bonneel

25 janvier 2006

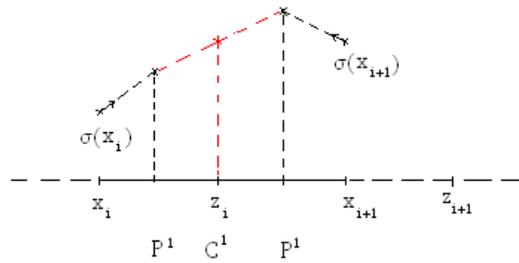
# Table des matières

<b>1</b>	<b>Cas 1D</b>	<b>3</b>
1.1	Raccords $\mathcal{C}^0$	3
1.2	Raccords $\mathcal{C}^1$	4
1.3	Fonction objectif	4
1.4	Résolution des systèmes	5
1.5	Résultats	7
1.5.1	Approximation d'une droite	7
1.5.2	$m_i = \text{abs}(\sin(x))$	7
1.5.3	Approximation d'une parabole	8
1.5.4	Approximation d'un polynome de degré 6	9
<b>2</b>	<b>Cas 2D</b>	<b>9</b>
2.1	Raccords $\mathcal{C}^0$	12
2.1.1	Entre les sous-triangles $\mu^p$ et $\gamma^p$	12
2.1.2	Entre les sous-triangles $\gamma^p$ et $\lambda^p$	13
2.1.3	Entre les sous-triangles $\lambda^p$ et $\mu^p$	13
2.1.4	Entre les triangles $s$ et $p$	14
2.1.5	Entre les triangles $r$ et $p$	15
2.1.6	Entre les triangles $p$ et $q$	15
2.2	Raccords $\mathcal{C}^1$	16
2.2.1	Au point de rupture	16
2.2.2	Entre les sous-triangles $\lambda^p$ et $\gamma^p$	17
2.2.3	Entre les sous-triangles $\lambda^p$ et $\mu^p$	17
2.2.4	Entre les sous-triangles $\mu^p$ et $\gamma^p$	17
2.2.5	Entre les triangles $p$ et $s$ au point bas-gauche	18
2.2.6	Entre les triangles $p$ et $s$ au point bas-droite	18
2.2.7	Entre les triangles $p$ et $r$ au point bas-gauche	18
2.2.8	Entre les triangles $p$ et $s$ au point haut-gauche	18
2.2.9	Entre les triangles $p$ et $q$ au point bas-droite	19
2.2.10	Entre les triangles $p$ et $q$ au point haut-gauche	19
2.3	La fonction objectif	19
2.4	Résolution du système	23
2.5	Maillage	23
2.6	Résultats	24
2.6.1	Approximation de $m_i = \text{constante}$	24
2.6.2	Approximation de $m_i = 4 * (i + j) + 3$ , un plan oblique	25
2.6.3	Approximation de $m_i = \text{abs}(\sin(x + y))$	25
2.6.4	Approximation d'une hyperboloïde $m_i = \sqrt{(3 - (x - 0.5)^2 - (y - 0.75)^2)}$	26
2.6.5	Approximation d'une hyperboloïde bruitée $m_i = \sqrt{(3 - (x - 0.5)^2 - (y - 0.75)^2)} + \text{bruit}$	26

On cherche à résoudre un problème d'approximation des moindres carrés à l'aide d'éléments de Powell-Sabin. Nous connaissons donc des valeurs bruitées dans un domaine 1D ou 2D, et nous cherchons la meilleure approximation de ces données.

## 1 Cas 1D

Dans un premier temps on se limite au cas 1D. Nous possédons  $N$  données bruitées aux points  $x_i$  données par  $m_i$ . Nous divisons les intervalles  $[x_i, x_{i+1}]$  en deux sous-intervalles  $[x_i, z_i]$  et  $[z_i, x_{i+1}]$ . Nous prendrons  $z_i$ , le point de rupture, au milieu des points  $x_i$  et  $x_{i+1}$ . Nous cherchons un polynôme  $\sigma(x)$  de degrés 2 dans chacun de ces deux intervalles, tels que l'on ait une continuité  $\mathcal{C}^1$  au niveau des  $z_i$  et des  $x_i$ .



Nous écrivons ces deux polynômes dans la base de Bernstein :

- Dans l'intervalle  $[x_i, z_i]$  :

$$\sigma(x) = \sum_{j=0}^2 \lambda_j^i \mathcal{B}^j\left(\frac{x - x_i}{z_i - x_i}\right)$$

- Dans l'intervalle  $[z_i, x_{i+1}]$  :

$$\sigma(x) = \sum_{j=0}^2 \mu_j^i \mathcal{B}^j\left(\frac{x - z_i}{x_{i+1} - z_i}\right)$$

où  $\mathcal{B}^j(x) = \binom{2}{j} x^j (1-x)^{2-j}$ .

### 1.1 Raccords $\mathcal{C}^0$

Nous souhaitons dans un premier temps un raccord  $\mathcal{C}^0$  (au moins) aux points  $x_i$ .

- Dans l'intervalle  $[x_i, z_i]$  :

$$\sigma(x_i) = \sum_{j=0}^2 \lambda_j^i \mathcal{B}^j(0) = \lambda_0^i$$

- Dans l'intervalle  $[z_{i-1}, x_i]$  :

$$\sigma(x_i) = \sum_{j=0}^2 \mu_j^i \mathcal{B}^j(0) = \mu_2^{i-1}$$

D'où la relation de continuité  $\mathcal{C}^0$  aux points  $x_i$  :

$$\lambda_0^i = \mu_2^{i-1}$$

De même, nous obtenons la continuité  $\mathcal{C}^0$  aux points  $z_i$  avec :

$$\lambda_2^i = \mu_0^{i-1}$$

Cela permet d'établir un premier système linéaire de contraintes pour la résolution du problème.

## 1.2 Raccords $\mathcal{C}^1$

Nous souhaitons maintenant raccorder les polynomes de manière  $\mathcal{C}^1$  aux points  $x_i$ .

On établit d'abord l'expression de la dérivée :

$$\begin{aligned} \left( \sum_{j=0}^2 \lambda_j \mathcal{B}_j(x) \right)' &= (\lambda_0(1-x)^2 + 2\lambda_1x(1-x) + \lambda_2x)' \\ &= \frac{1}{h} (-2\lambda_0(1-x) + 2\lambda_1(1-2x) + 2\lambda_2x) \end{aligned}$$

En écrivant la même expression avec les  $\mu_i$ , on arrive à l'expression de la continuité de la dérivée aux points  $x_i$  :

$$-\lambda_0^i + \lambda_1^i = -\mu_1^{i-1} + \mu_2^{i-1}$$

En écrivant le même raisonnement aux points  $z_i$ , on obtient la relation de continuité de la dérivée aux points  $z_i$  :

$$-\mu_0^i + \mu_1^i = -\lambda_1^i + \lambda_2^i$$

Nous obtenons un deuxième système linéaire de contraintes.

## 1.3 Fonction objectif

Sagissant d'un problème de minimisation sous contraintes de continuité, on doit établir la fonction objectif à minimiser.

La première fonction, qui semble la plus évidente est une fonction visant à faire passer la courbe  $\sigma(x)$  proche des points de controle. On cherche donc à minimiser la somme :

$$\sum_{i=1}^N (\sigma(x_i) - m_i)^2$$

où  $m_i$  sont les points dont on connaît la valeur (au bruit près). De plus, nous devons minimiser les oscillations de la courbe, ce qui correspond à minimiser

l'intégrale :

$$\int (\sigma''(x))^2 dx$$

Nous établissons donc la fonction objectif comme étant une combinaison linéaire de ces deux fonctions, pondérées par un paramètre  $\alpha$  :

$$f(\Gamma) = \alpha \int (\sigma''(x))^2 dx + \sum_{i=1}^{N-1} (\sigma(x_i) - m_i)^2$$

où  $\Gamma = \begin{pmatrix} \lambda_0^1 \\ \lambda_1^1 \\ \lambda_2^1 \\ \mu_0^1 \\ \mu_1^1 \\ \mu_2^1 \\ \vdots \\ \lambda_0^{N-1} \\ \lambda_1^{N-1} \\ \lambda_2^{N-1} \\ \mu_0^{N-1} \\ \mu_1^{N-1} \\ \mu_2^{N-1} \end{pmatrix}$  est le vecteur des inconnues.

En exprimant la dérivée seconde (constante) :

$$\left( \sum_{j=0}^2 \lambda_j \mathcal{B}_j(x) \right)'' = \frac{1}{h^2} (2\lambda_0 - 4\lambda_1 + 2\lambda_2)$$

on obtient l'expression de  $f$  :

$$f(\Gamma) = \alpha \frac{4}{h^3} \left( \sum_{i=1}^{N-1} (\lambda_0^i - 2\lambda_1^i + \lambda_2^i)^2 + \sum_{i=1}^{N-1} (\mu_0^i - 2\mu_1^i + \mu_2^i)^2 \right) + \sum_{i=1}^{N-1} (\lambda_0^i - m_i)^2$$

## 1.4 Résolution des systèmes

L'expression du système linéaire de continuité  $\mathcal{C}^0$  sous forme matricielle donne :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & & & & & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ & & & & & & & & & & \ddots & \dots \end{pmatrix}$$

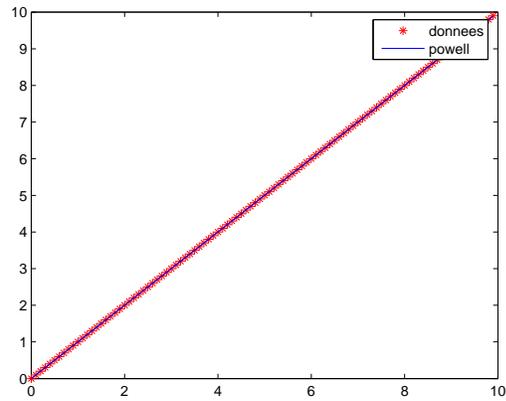
avec  $A \in \mathcal{M}_{2N-3, 6(N-1)}$ .

De même, nous avons la forme matricielle du système linéaire de la continuité  $\mathcal{C}^1$  :



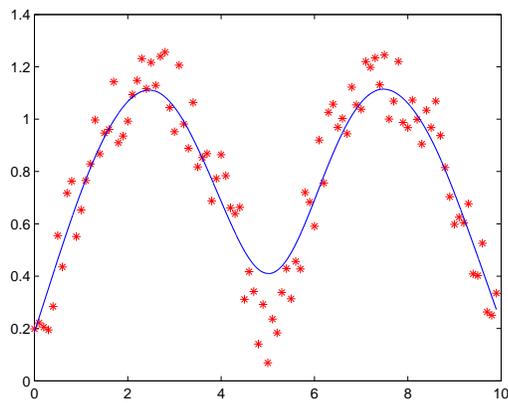
## 1.5 Résultats

### 1.5.1 Approximation d'une droite

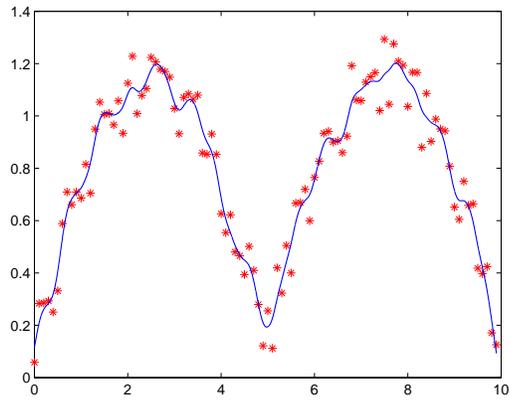


### 1.5.2 $m_i = \text{abs}(\sin(x))$

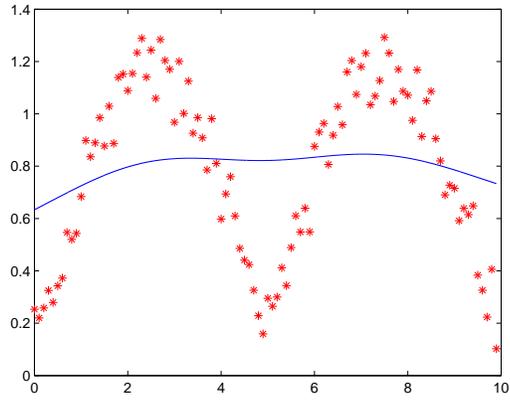
$\alpha = 1$ ,  $|\text{bruit}| = 3$  (même coût pour le fait de passer près des points et d'osciller moins)



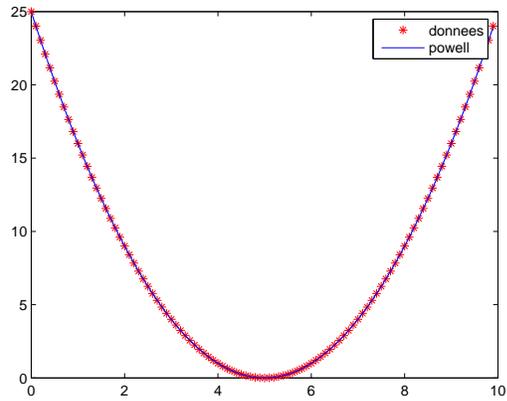
$\alpha = 0.01$ ,  $|\text{bruit}| = 3$  (on passe plus près des points)



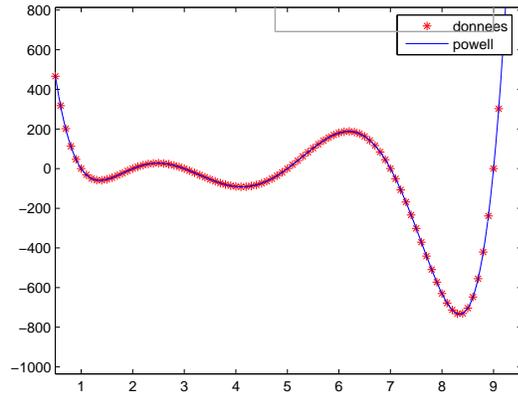
$\alpha = 100$ ,  $|\text{bruit}| = 3$  (on oscille moins)



### 1.5.3 Approximation d'une parabole

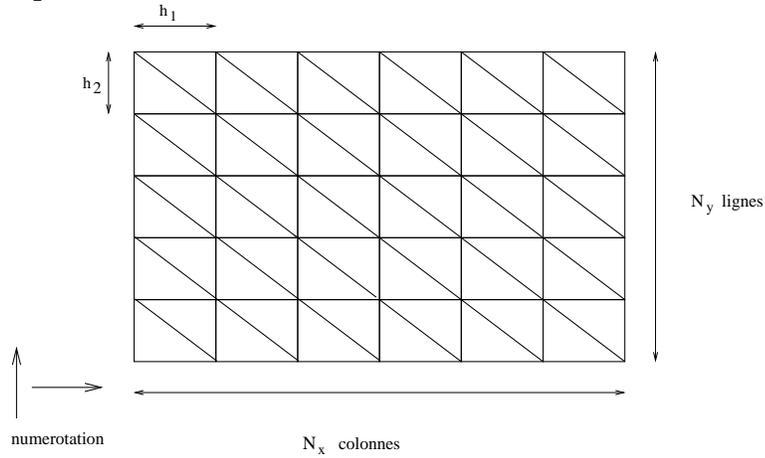


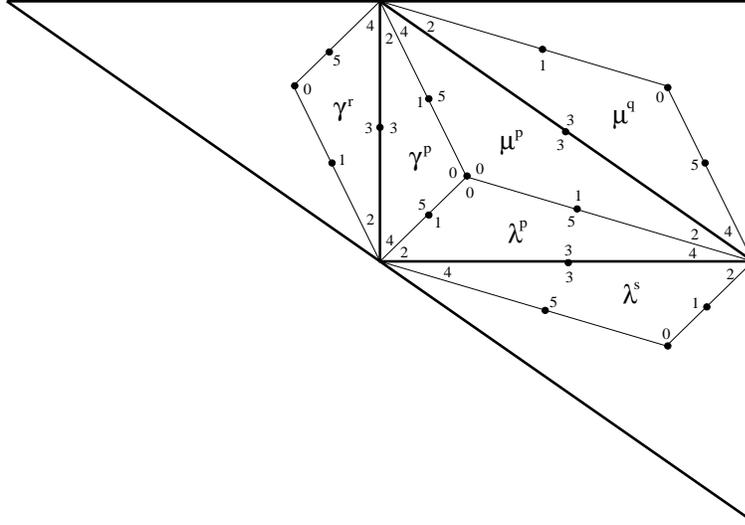
### 1.5.4 Approximation d'un polynome de degré 6



## 2 Cas 2D

On s'intéresse maintenant à la résolution du problème d'approximation dans le cas 2D en utilisant un élément de Powell-Sabin triangulaire, de dimension  $h_1 \cdot h_2$ .





Nous procéderons de la même manière que dans le cas 1D, à savoir trouver l'expression des contraintes  $\mathcal{C}^0$ , puis  $\mathcal{C}^1$  le long de chaque segment, puis l'expression de la fonction objectif. Nous divisons pour cela le domaine en rectangles, divisés en 2 triangles, chaque triangle étant divisé en 3 sous-triangles au niveau de son point de rupture situé en son centre de gravité.

Nous noterons les coefficients dans la base de Bernstein par  $\lambda$ ,  $\mu$ , et  $\gamma$  dans les 3 sous-triangles de chaque triangle rectangle. Par extension, nous noterons également ces 3 sous-triangles de la même façon. Les polynômes à trouver sont donc de la forme :

$$\sigma(x) = \sum_{|\alpha|=2} \xi_\alpha \mathcal{B}^\alpha(x)$$

où  $\xi = \lambda, \mu$  ou  $\gamma$ , et  $\alpha$  est un multi-indice.

Par commodité, nous noterons les 6 multi-indices possibles tels que  $|\alpha| = 2$  de la façon suivante :

$$i = 0 \Leftrightarrow \alpha = (2, 0, 0)$$

$$i = 1 \Leftrightarrow \alpha = (1, 1, 0)$$

$$i = 2 \Leftrightarrow \alpha = (0, 2, 0)$$

$$i = 3 \Leftrightarrow \alpha = (0, 1, 1)$$

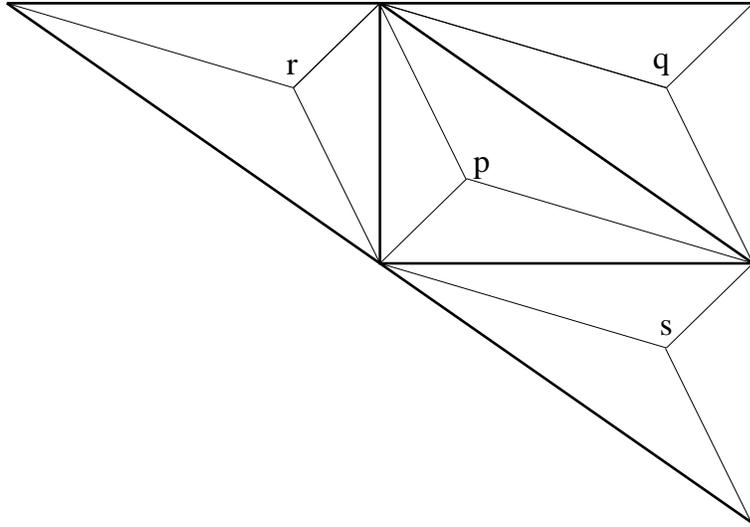
$$i = 4 \Leftrightarrow \alpha = (0, 0, 2)$$

$$i = 5 \Leftrightarrow \alpha = (1, 0, 1)$$

et l'écriture du polynôme devient :

$$\sigma(x) = \sum_{i=0}^5 \xi_i \mathcal{B}^i(x)$$

Les triangles rectangles seront indicés par  $p$ ,  $r$ ,  $q$ , ou  $s$  suivant sa position (voir figure), et ainsi les coefficients du polynôme pourront posséder les exposants  $p$ ,  $r$  ou  $q$  pour indiquer de quel triangle il s'agit :



Nous numérotions les  $N$  triangles ( $N = 2 \cdot N_x \cdot N_y$ ) en les ordonnant d'abord par colonne puis par ligne, de bas en haut puis de gauche à droite, en alternant d'abord les triangles rectangles inférieurs gauches puis les supérieurs droits. Le vecteur des inconnues est alors :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \lambda_0^1 \\ \lambda_1^1 \\ \lambda_2^1 \\ \lambda_3^1 \\ \lambda_4^1 \\ \lambda_5^1 \\ \mu_0^1 \\ \mu_1^1 \\ \mu_2^1 \\ \mu_3^1 \\ \mu_4^1 \\ \mu_5^1 \\ \gamma_0^1 \\ \gamma_1^1 \\ \gamma_2^1 \\ \gamma_3^1 \\ \gamma_4^1 \\ \gamma_5^1 \\ \vdots \\ \lambda_0^N \\ \lambda_1^N \\ \lambda_2^N \\ \lambda_3^N \\ \lambda_4^N \\ \lambda_5^N \\ \mu_0^N \\ \mu_1^N \\ \mu_2^N \\ \mu_3^N \\ \mu_4^N \\ \mu_5^N \\ \gamma_0^N \\ \gamma_1^N \\ \gamma_2^N \\ \gamma_3^N \\ \gamma_4^N \\ \gamma_5^N \end{pmatrix}$$

## 2.1 Raccords $\mathcal{C}^0$

### 2.1.1 Entre les sous-triangles $\mu^p$ et $\gamma^p$

Comme  $\sigma$  est un polynome de degré 2, nous obtenons la continuité  $\mathcal{C}^0$  sur toute l'arête séparant ces deux sous-triangles en imposant l'égalité des points de controles sur les deux sommets composant cette arête ainsi que sur le point central.

Nous obtenons les égalité des coefficients :

$$\begin{cases} \mu_0^p &= \gamma_0^p \\ \mu_5^p &= \gamma_1^p \\ \mu_4^p &= \gamma_2^p \end{cases}$$

### 2.1.2 Entre les sous-triangles $\gamma^p$ et $\lambda^p$

Nous obtenons les conditions de raccord  $\mathcal{C}^0$  de la même manière que précédemment.

Nous obtenons les égalité des coefficients :

$$\begin{cases} \gamma_0^p &= \lambda_0^p \\ \gamma_5^p &= \lambda_1^p \\ \gamma_4^p &= \lambda_2^p \end{cases}$$

Nous ferons alors attention à supprimer la dernière relation (par exemple) partout où elle peut s'avérer redondante par transitivité (sur les triangles ne touchant pas le bord "gauche" ou le bord "bas" du domaine, et sur tous les triangles rectangles supérieurs droits par exemple), sinon nous aurions un déterminant nul de notre représentation matricielle du système.

### 2.1.3 Entre les sous-triangles $\lambda^p$ et $\mu^p$

Nous obtenons les conditions de raccord  $\mathcal{C}^0$  de la même manière que précédemment.

Nous obtenons les égalité des coefficients :

$$\begin{cases} \lambda_0^p &= \mu_0^p \\ \lambda_5^p &= \mu_1^p \\ \lambda_4^p &= \mu_2^p \end{cases}$$

Pour les mêmes raisons de redondance des contraintes, nous n'exprimerons pas du tout la première contrainte  $\lambda_0^p = \mu_0^p$  qui a déjà été exprimée dans les 2 précédents systèmes par transitivité (à savoir  $\mu_0^p = \gamma_0^p$  et  $\gamma_0^p = \lambda_0^p$ ).

Les trois contraintes précédentes nous permettent d'établir une première matrice  $A$  donnant les contraintes de raccord  $\mathcal{C}^0$  à l'intérieur des sous-triangles (qu'ils soient inférieurs gauches ou supérieurs droits, car les contraintes se déduisent par simple rotation et sont donc les mêmes). Pour cela on construit une matrice  $A_1$  correspondant aux triangles touchant les bords gauches et bas du domaine, et pour tous les triangles rectangles supérieurs droits, et une matrice  $A_2$  pour les autres triangles rectangles. Ils s'expriment par :





Nous obtenons ainsi une matrice  $D_1$  sur chaque rectangle :

$$D_1 = \begin{pmatrix} & 1 & 0 & & -1 & 0 \\ \mathcal{O}_{3,6} & & 1 & 0 & \mathcal{O}_{3,12} & & -1 & 0 \\ & & & 1 & 0 & & -1 & 0 \\ & & & & & & & \mathcal{O}_{3,6} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,36}$$

Nous pouvons alors construire la matrice totale  $D$  :

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & & & & \\ & D_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & D_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3N_x N_y, 36N_x N_y}$$

En faisant attention à éviter les redondances des contraintes  $\mathcal{C}^0$ , les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  obtenues sont donc de rang maximal et suffisent à exprimer les toutes les contraintes  $\mathcal{C}^0$  du système.

## 2.2 Raccords $\mathcal{C}^1$

Pour exprimer les raccords  $\mathcal{C}^1$ , on utilisera le fait que dans chaque paire de triangles à raccorder, les plans tangents formés par le point de contrôle au sommet et les points milieux des arêtes sont identiques pour les deux triangles. Cela se traduit par le déterminant de la matrice formée par les 3 vecteurs qui doit être nul (les vecteurs sont donc liés et appartiennent donc au même plan).

### 2.2.1 Au point de rupture

Nous cherchons la continuité  $\mathcal{C}^1$  au point de rupture de chaque triangle rectangle. Les 3 vecteurs des points de contrôle dont on cherche à rendre le déterminant nul sont :

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \begin{pmatrix} \frac{h_1}{3} \\ -\frac{h_2}{6} \\ \lambda_5^p - \lambda_0^p \end{pmatrix} \\ \vec{v}_2 &= \begin{pmatrix} -\frac{h_1}{6} \\ \frac{h_2}{3} \\ \gamma_1^p - \gamma_0^p \end{pmatrix} \\ \vec{v}_3 &= \begin{pmatrix} -\frac{h_1}{6} \\ -\frac{h_2}{6} \\ \lambda_1^p - \lambda_0^p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous avons donc la relation :

$$\begin{vmatrix} \frac{h_1}{3} & -\frac{h_1}{6} & -\frac{h_1}{6} \\ -\frac{h_2}{6} & \frac{h_2}{3} & -\frac{h_2}{6} \\ \lambda_5^p - \lambda_0^p & \gamma_1^p - \gamma_0^p & \lambda_1^p - \lambda_0^p \end{vmatrix} = 0$$

ce qui conduit, en développant, à l'expression d'une première contrainte de raccord  $\mathcal{C}^1$  :

$$-3\lambda_0^p + \lambda_1^p + \lambda_5^p + \gamma_1^p = 0$$



### 2.2.5 Entre les triangles $p$ et $s$ au point bas-gauche

De la même manière, nous obtenons le déterminant à annuler :

$$\begin{vmatrix} \frac{h_1}{3} & \frac{h_1}{2} & \frac{h_1}{6} \\ -\frac{h_2}{6} & 0 & \frac{h_2}{6} \\ \lambda_5^s - \lambda_2^p & \lambda_3^p - \lambda_2^p & \lambda_1^p - \lambda_2^p \end{vmatrix} = 0$$

qui donne la relation :

$$\lambda_1^p - \lambda_2^p + \lambda_5^s - \lambda_3^p = 0$$

### 2.2.6 Entre les triangles $p$ et $s$ au point bas-droite

De la même manière, nous obtenons le déterminant à annuler :

$$\begin{vmatrix} -\frac{h_1}{6} & -\frac{h_1}{2} & -\frac{h_1}{3} \\ -\frac{h_2}{6} & 0 & \frac{h_2}{6} \\ \lambda_1^s - \lambda_4^p & \lambda_3^p - \lambda_4^p & \lambda_5^p - \lambda_4^p \end{vmatrix} = 0$$

qui donne la relation :

$$\lambda_3^p + \lambda_4^p - \lambda_5^p - \lambda_1^s = 0$$

Les 2 relations précédentes concernant la continuité  $\mathcal{C}^1$  entre les triangles  $p$  et  $s$ , nous en faisons une matrice  $F$  formée de la même façon que la matrice  $B$ , mais utilisant les blocs  $F_1$  donnés par :

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & & 1 & \mathcal{O}_{2,12} & 1 & -1 & -1 & & \mathcal{O}_{2,12} \\ 0 & -1 & & & & 1 & 1 & -1 & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,36}$$

### 2.2.7 Entre les triangles $p$ et $r$ au point bas-gauche

De la même manière, nous obtenons le déterminant à annuler :

$$\begin{vmatrix} \frac{h_1}{6} & 0 & -\frac{h_1}{6} \\ \frac{h_2}{6} & \frac{h_2}{2} & \frac{h_2}{3} \\ \gamma_5^p - \gamma_4^p & \gamma_3^p - \gamma_4^p & \gamma_1^r - \gamma_4^p \end{vmatrix} = 0$$

qui donne la relation :

$$\gamma_3^p + \gamma_4^p - \gamma_5^p - \gamma_1^r = 0$$

### 2.2.8 Entre les triangles $p$ et $s$ au point haut-gauche

De la même manière, nous obtenons le déterminant à annuler :

$$\begin{vmatrix} \frac{h_1}{6} & 0 & -\frac{h_1}{6} \\ -\frac{h_2}{3} & -\frac{h_2}{2} & -\frac{h_2}{6} \\ \gamma_1^p - \gamma_4^p & \gamma_3^p - \gamma_2^p & \gamma_5^r - \gamma_2^p \end{vmatrix} = 0$$

qui donne la relation :

$$\gamma_5^r - \gamma_2^p + \gamma_1^p - \gamma_3^p = 0$$

Les 2 relations précédentes concernant la continuité  $\mathcal{C}^1$  entre les triangles  $p$  et  $r$ , nous en faisons une matrice  $G$  formée de la même façon que la matrice  $C$ , mais utilisant les blocs  $G_1$  donnés par :

$$G_1 = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_{3,12} & 0 & -1 & & \mathcal{O}_{2,36(N_y-1)} & \mathcal{O}_{2,12} & & 1 & 1 & -1 \\ & & & 1 & & & & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,36N_y}$$

### 2.2.9 Entre les triangles $p$ et $q$ au point bas-droite

De la même manière, nous obtenons le déterminant à annuler :

$$\begin{vmatrix} -\frac{h_1}{3} & -\frac{h_1}{2} & -\frac{h_1}{6} \\ \frac{h_2}{6} & \frac{h_2}{2} & \frac{h_2}{3} \\ \mu_1^p - \mu_2^p & \mu_3^p - \mu_2^p & \mu_5^q - \mu_2^p \end{vmatrix} = 0$$

qui donne la relation :

$$\mu_5^q - \mu_2^p + \mu_1^p - \mu_3^p = 0$$

### 2.2.10 Entre les triangles $p$ et $q$ au point haut-gauche

De la même manière, nous obtenons le déterminant à annuler :

$$\begin{vmatrix} \frac{h_1}{3} & \frac{h_1}{2} & \frac{h_1}{6} \\ -\frac{h_2}{6} & -\frac{h_2}{2} & -\frac{h_2}{3} \\ \mu_1^q - \mu_4^p & \mu_3^p - \mu_4^p & \mu_5^p - \mu_4^p \end{vmatrix} = 0$$

qui donne la relation :

$$\mu_5^p - \mu_4^p + \mu_1^q - \mu_3^p = 0$$

Les 2 relations précédentes concernant la continuité  $\mathcal{C}^1$  entre les triangles  $p$  et  $q$ , nous en faisons une matrice  $H$  formée de la même façon que la matrice  $D$  (diagonale par blocs), mais utilisant les blocs  $H_1$  donnés par :

$$H_1 = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_{3,6} & 0 & 1 & -1 & -1 & & 0 & \mathcal{O}_{2,12} & & 1 & \mathcal{O}_{2,6} \\ & & & & -1 & -1 & 1 & & 0 & 1 & & 0 & \mathcal{O}_{2,6} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,36}$$

Nous avons ainsi toutes les relations (libres) de continuité  $\mathcal{C}^1$ , dans les matrices  $E$ ,  $F$ ,  $G$  et  $H$ , de rangs maximaux car on a supprimé les contraintes redondantes.

## 2.3 La fonction objectif

De la même manière que pour le cas 1D, nous avons une fonction coût composée d'une minimisation de la distance de la surface aux points de contrôle :

$$J = \sum_{i=1}^N (\sigma(x_i) - m_i)^2$$

Sur les quatres points de chaque rectangle, on minimise donc, pour les triangles inférieurs gauches :

$$J_i = (\lambda_2 - m_0^p)^2 + (\lambda_4 - m_1^p)^2 + (\mu_2 - m_1^p)^2 + (\mu_3 - m_3^p)^2 + (\gamma_2 - m_3^p)^2 + (\gamma_4 - m_0^p)^2$$

et pour les triangles supérieurs droits :

$$J_{i+1} = (\lambda_2 - m_2^p)^2 + (\lambda_4 - m_3^p)^2 + (\mu_2 - m_3^p)^2 + (\mu_4 - m_1^p)^2 + (\gamma_2 - m_1^p)^2 + (\gamma_4 - m_2^p)^2$$

En dérivant par rapport aux  $\xi$ , on obtient, pour chaque triangle le bloc :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 2 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

et pour chaque rectangle le vecteur :

$$V = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 2m_0^i \\ 0 \\ 2m_2^i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2m_2^i \\ 0 \\ 2m_1^i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2m_1^i \\ 0 \\ 2m_0^i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2m_3^i \\ 0 \\ 2m_1^i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2m_1^i \\ 0 \\ 2m_2^i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2m_2^i \\ 0 \\ 2m_3^i \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

et le gradient que l'on cherche à minimiser s'exprime donc par :

$$L = \begin{bmatrix} J & & & \\ & J & & \\ & & \ddots & \\ & & & J \end{bmatrix} - V$$

De plus, nous devons minimiser les oscillations de la courbe, ce qui correspond à minimiser l'intégrale de la norme matricielle de  $\sigma''$  :

$$\int (\partial_{xx}\sigma(x))^2 + 2(\partial_{xy}\sigma(x))^2 + (\partial_{yy}\sigma(x))^2 dx$$

On pose  $\xi$  valant  $\lambda$ ,  $\gamma$  ou  $\mu$ , et  $b_0$ ,  $b_1$  et  $b_2$  les coordonnées barycentriques dans le triangle. On a :

$$\sigma(x) = \xi_0 b_0^2 + 2\xi_1 b_0 b_1 + \xi_2 b_1^2 + 2\xi_3 b_1 b_2 + \xi_4 b_2^2 + 2\xi_5 b_2 b_0$$

$$\partial_{xx}\sigma(x) = 2\xi_0 (\partial_x b_0)^2 + 4\xi_1 \partial_x b_0 \partial_x b_1 + 2\xi_2 (\partial_x b_1)^2 + 4\xi_3 \partial_x b_1 \partial_x b_2 + 2\xi_4 (\partial_x b_2)^2 + 4\xi_5 \partial_x b_2 \partial_x b_0$$

$$\partial_{yy}\sigma(x) = 2\xi_0 (\partial_y b_0)^2 + 4\xi_1 \partial_y b_0 \partial_y b_1 + 2\xi_2 (\partial_y b_1)^2 + 4\xi_3 \partial_y b_1 \partial_y b_2 + 2\xi_4 (\partial_y b_2)^2 + 4\xi_5 \partial_y b_2 \partial_y b_0$$

$$\partial_{xy}\sigma(x) = 2\xi_0 \partial_x b_0 \partial_y b_0 + 2\xi_1 (\partial_x b_0 \partial_y b_1 + \partial_y b_0 \partial_x b_1) + 2\xi_2 \partial_x b_1 \partial_y b_1 + 2(\xi_3 \partial_x b_1 \partial_y b_2 + \xi_3 \partial_y b_1 \partial_x b_2) + 2\xi_4 \partial_x b_2 \partial_y b_2 + 2(\xi_5 \partial_x b_2 \partial_y b_0 + \xi_5 \partial_y b_2 \partial_x b_0)$$

Ici, on a :

$$\begin{array}{rcccccc} & \partial_x b_0 & \partial_y b_0 & \partial_x b_1 & \partial_y b_1 & \partial_x b_2 & \partial_y b_2 \\ \lambda & : & 0 & h_1 & -\frac{h_2}{3} & -2\frac{h_1}{3} & \frac{h_2}{3} & -\frac{h_1}{3} \\ \mu & : & -h_2 & -h_1 & 2\frac{h_2}{3} & \frac{h_1}{3} & \frac{h_2}{3} & 2\frac{h_1}{3} \\ \gamma & : & h_2 & 0 & -\frac{h_2}{3} & \frac{h_1}{3} & -2\frac{h_2}{3} & -\frac{h_1}{3} \end{array}$$

Sur chaque triangle,  $I = I_\lambda + I_\mu + I_\gamma$

On pose  $k_1 = 2 \left(\frac{h_2}{3}\right)^2$ ,  $k_2 = \frac{h_1 \cdot h_2}{3^2}$ ,  $k_3 = 2 \left(\frac{h_1}{3}\right)^2$  et  $|T| = \frac{h_1 \cdot h_2}{2 \cdot 3}$  l'air du sous-triangle.

$$\frac{I_\lambda}{|T|} = k_1^2 (\lambda_2 - 2\lambda_3 + \lambda_4)^2 + 2k_2^2 (-6\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 - 2\lambda_4 + 6\lambda_5)^2 + k_3^2 (9\lambda_0 - 12\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 + \lambda_4 - 6\lambda_5)^2$$

$$\frac{I_\mu}{|T|} = k_1^2 (9\mu_0 - 12\mu_1 + 4\mu_2 + 4\mu_3 + \mu_4 - 6\mu_5)^2 + 2k_2^2 (18\mu_0 - 18\mu_1 + 4\mu_2 + 10\mu_3 + 4\mu_4 - 18\mu_5)^2 + k_3^2 (9\mu_0 - 6\mu_1 + \mu_2 + 4\mu_3 + 4\mu_4 - 12\mu_5)^2$$

$$\frac{I_\gamma}{|T|} = k_1^2 (9\gamma_0 - 6\gamma_1 + \gamma_2 + 4\gamma_3 + 4\gamma_4 - 12\gamma_5)^2 + 2k_2^2 (6\gamma_1 - 2\gamma_2 - 2\gamma_3 + 4\gamma_4 - 6\gamma_5)^2 + k_3^2 (\gamma_2 - 2\gamma_3 - \gamma_4)^2$$

On peut ainsi exprimer les matrices  $\nabla I_\lambda$ ,  $\nabla I_\mu$  et  $\nabla I_\gamma$  (matrices trop grosses pour être explicitées ici), et ainsi écrire :

$$\nabla I = \begin{bmatrix} \nabla I_\lambda & & \mathcal{O} \\ & \nabla I_\mu & \\ \mathcal{O} & & \nabla I_\gamma \end{bmatrix}$$

et ainsi la matrice correspondant à notre fonction coût :

$$\nabla K = \begin{bmatrix} \nabla I & & \mathcal{O} \\ & \ddots & \\ \mathcal{O} & & \nabla I \end{bmatrix}$$

## 2.4 Résolution du système

De la même manière que dans le cas 1D, nous avons un système à résoudre de la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha \cdot K + L & [A^T B^T C^T D^T E^T F^T G^T H^T] \\ \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{bmatrix} & \mathcal{O} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Gamma \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix}$$

où  $\xi$  sont les multiplicateurs de Lagrange liés aux contraintes du système.

Le système, bien qu'énorme ( 7238 x 7238 pour une résolution de  $N_x = 10$  et  $N_y = 10$  par exemple) ne coûte pas trop cher ni en stockage ni en temps de calcul de résolution car il n'est formé que de matrices très creuses (le système S dans l'exemple précédent possède seulement 41 268 non-zéros sur 52 388 644 éléments, soit un ratio de 7.9E-4 environ).

En revanche il est mal conditionné pour une résolution directe par Matlab bien que les résultats soient corrects pour des valeurs de  $N_x$  et  $N_y$  suffisamment grandes, et nous devons faire appel à une fonction GMRES pour la résolution (ne marche pas...). En effet, le conditionnement donné par Matlab vaut environ 1E-17

Nous avons ainsi essayé une résolution itérative par `qmr` de Matlab, avec comme fonction initiale la fonction trouvée par une résolution directe, mais les oscillations restent importantes. Nous n'avons pu préconditionner par la matrice  $L$  de la factorisation  $LU$  du système par manque de mémoire (le système est trop important).

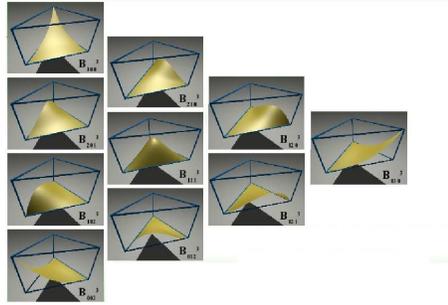
## 2.5 Maillage

Nous affichons le maillage grâce à la commande `surf` de Matlab, et grâce à l'algorithme de De Casteljau généralisé au cas 2D pour évaluer les polynômes dans la base de Bernstein (algo fourni dans le polycopié).

Les résultats de cette version de l'algorithme de De Casteljau se trouvent décevante en temps de calcul, l'évaluation de la fonction étant beaucoup plus lente que la résolution totale du système!...

Nous passons en paramètre les coefficients de chaque fonction de base indicés par des multi-indices tels que  $|\alpha| = 3$ .

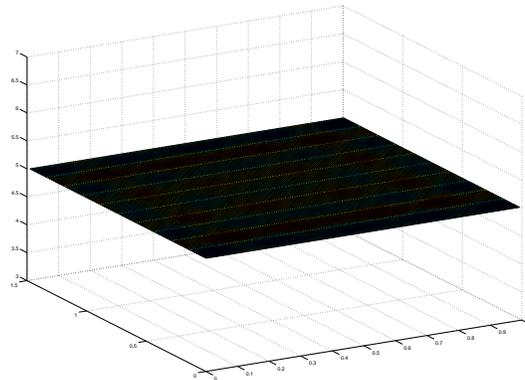
Nous avons donc les fonctions de base suivantes :



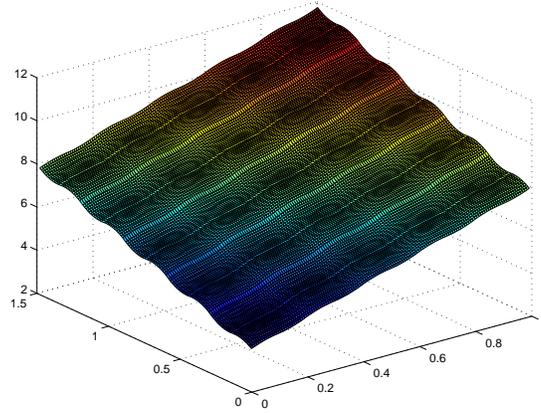
## 2.6 Résultats

Les résultats suivants, sauf mention contraire sont donnés avec  $\alpha = 1$  afin d'équilibrer l'approximation par rapport à l'interpolation. Ils sont effectués sur un maillage de  $10 \times 10$ , par une résolution itérative avec initialisation avec la solution d'une méthode directe.

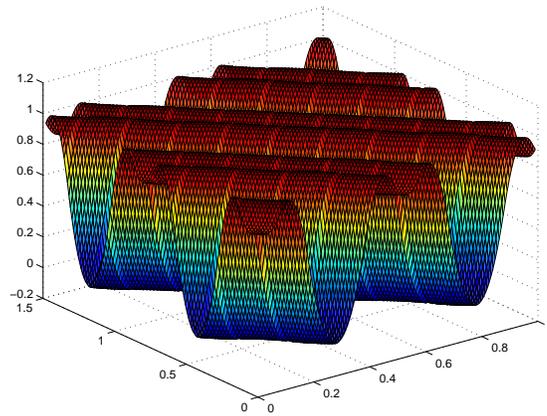
### 2.6.1 Approximation de $m_i = \text{constante}$



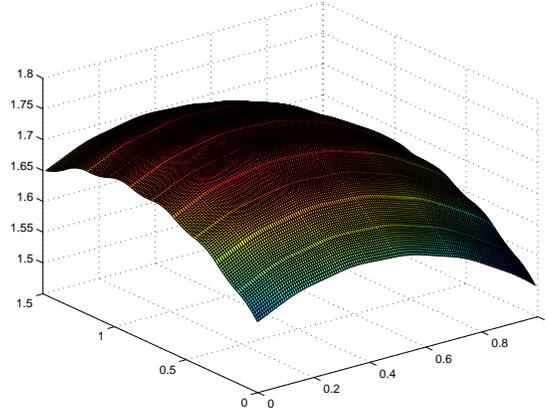
**2.6.2** Approximation de  $m_i = 4 * (i + j) + 3$ , un plan oblique



**2.6.3** Approximation de  $m_i = abs(sin(x + y))$

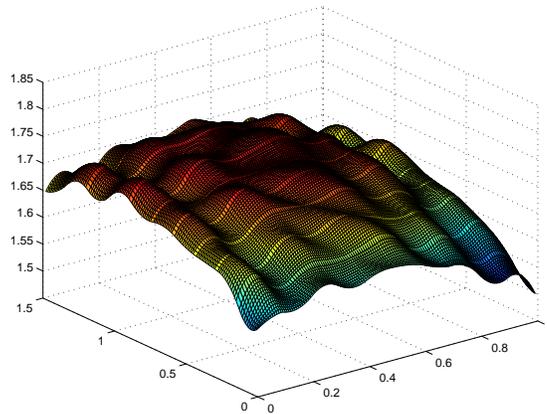


#### 2.6.4 Approximation d'une hyperboloïde $m_i = \sqrt{3 - (x - 0.5)^2 - (y - 0.75)^2}$



#### 2.6.5 Approximation d'une hyperboloïde bruitée $m_i = \sqrt{3 - (x - 0.5)^2 - (y - 0.75)^2} + \text{bruit}$

Nous choisissons  $\alpha = 100$  afin de réduire l'influence du bruit (ici d'amplitude 0.05).



### 3 Conclusion

Nous avons donc pu obtenir une approximation de fonctions bidimensionnelles à l'aide des éléments finis de Powell-Sabin. Il est important de noter que le conditionnement du système final à résoudre est très mauvais ce qui influe énormément sur les résultats.