Nicolas BONNEEL
Nicolas SORDELLO
Jean-Gabriel PRINCE
Ezechiel FERRANDIN
Xavier RAFFIN

AUTOMATIQUE GMM5

Etude du comportement d'un avion à l'atterrissage

Pilatus Porter du Paraclub de Pamiers

Problème à résoudre

Soit le système mécanique:

$$\begin{cases} \ddot{z} + c\,\dot{z} + kz = kf(x) \\ z = y - y_0 \\ x = V_0 t \end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned}
&y_0 : \textit{position d'équilibre statique} \\
&f(x) : \textit{forme de la piste d'aterrissage} \\
&c : \textit{coefficient d'amortissement du train d'aterrissage} \\
&k : \textit{constante de raideur du train d'aterrissage} \\
&m : \textit{masse de l'avion} \\
&V_0 : \textit{vitesse de l'avion à l'aterrissage} \\
&f_r : \textit{fréquence} \\
&w = 2\pi\, f_r = \sqrt{\frac{k}{m}} \ \textit{la pulsation}
\end{aligned}$$

valeurs numériques des données:

$$\begin{aligned}
&f_r = 2\,Hz \Rightarrow w = 4\pi\, rad.s^{-1} \\
&m = 1.286\,T \\
&k = w^2 \times m = 16\pi^2 \times 1{,}286.10^4\ N.m
\end{aligned}$$

Etude du système

Mise en forme du système

On veut arriver à un système de la forme: $\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX \end{cases}$

on pose $X = \begin{pmatrix} z \\ \dot{z} \end{pmatrix}$

On réécrit le système et on obtient:

$$\begin{cases} \dot{\begin{pmatrix} z \\ \dot{z} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k}{m} & \frac{-c}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \dot{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k}{m} \end{pmatrix} f(x) \\ Y = y - y_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \dot{z} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Ce qui permet d'identifier A,B,C:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k}{m} & \frac{-c}{m} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k}{m} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Analyse du système

Commandabilité:

On a par définition la matrice de commandabilité:

$$M_{com} = \begin{pmatrix} B & AB & A^2 B & \ldots & A^{n-1} B \end{pmatrix}$$

Ici n = 2, on a donc :

$$M_{com} = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & \frac{-ck}{m^2} \end{pmatrix}$$

Le rang de M_{com} est maximal et vaut n=2. Donc le système est commandable.

Observabilité:

On a par définition la matrice d' observabilité:

$$O=\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

ici n = 2, on a donc:

$$O=\begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De meme que pour la matrice de commandabilité, le rang de O est maximal et vaut n=2. Donc le système est observable

Stabilité:

Pour étudier la stabilité du système, on calcule les valeurs propres de A.

Soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres.

Elles vérifient par diagonalisation de la matrice A:

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2=tr(A) \\ \lambda_1\times\lambda_2=det(A) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2=\dfrac{-c}{m} \\ \lambda_1\times\lambda_2=\dfrac{k}{m} \end{cases}$$

On obtient par résolution de ce système:

$$\begin{cases} \lambda_1=\dfrac{-c+\sqrt{c^2-4km}}{2m} \\ \lambda_2=\dfrac{-c-\sqrt{c^2-4km}}{2m} \end{cases}$$

Discussion suivant c :

- $c=0$:

$$\lambda_1=-\lambda_2=iw$$

Les valeurs propres sont imaginaires pures, avec une multiplicité de 1, donc le système est stable.

- $c \neq 0$:

➔ $c^2 > 4\,k.m \Rightarrow$ les valeurs propres sont réelles, distinctes et strictement négatives
$\Rightarrow$ système A-stable

➔ $c^2 = 4\,k.m \Rightarrow$ il y a une valeur propre réelle double $\lambda = \dfrac{-c}{2m} < 0$
$\Rightarrow$ système A-stable

➔ $c^2 < 4\,k.m \Rightarrow$ les valeurs propres sont complexes.
On a les parties réelles $\Re(\lambda_1) = \Re(\lambda_2) = \dfrac{-c}{2m} < 0$
$\Rightarrow$ système A-stable

<u>Entrée bornée-Etat borné (E.B.E.B):</u>

Nous avons les implications données par :

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Stable asymptotiquement} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\text{stable} & & \text{E.B E.B} \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

On en déduit directement de la partie précédente que si $c \neq 0$ alors le système est E.B E.B.

Reste à voir le cas où c=0:
On a dans ce cas, les valeurs propres de la matrice suivantes : $\lambda_1 = -\lambda_2 = iw$

Elles sont donc à partie réelle nulle et de multiplicité 1.
D'après le cours, on ne peut pas conclure directement si le système est E.B E.B.

On exprime l'équation différentielle dans la base de ses vecteurs propres.

La matrice de passage est :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\sqrt{\dfrac{k}{m}} & -i\sqrt{\dfrac{k}{m}} \end{bmatrix}$$

donc

$$P^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -2i\sqrt{\frac{k}{m}} \\ \frac{1}{2} & 2i\sqrt{\frac{k}{m}} \end{bmatrix}$$

On pose :

$$\begin{pmatrix} z \\ \dot{z} \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \ddot{\xi} \end{pmatrix}=P^{-1}AP\begin{pmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \end{pmatrix}+P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k}{m} \end{pmatrix}f(t)$$

Nous obtenons donc un système d'équations différentielles découplées suivant :

$$\begin{cases} \dot{\xi}=i\sqrt{\frac{k}{m}}\xi-\frac{i}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}f(t) \\ \ddot{\xi}=-i\sqrt{\frac{k}{m}}\dot{\xi} \end{cases}$$

La solution de la première équation s'écrit de manière naturelle :

$$\xi(t)=Cte.e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t}+\frac{1}{2}f(t)$$

Donc dans le cas où c=0, le système est aussi EBEB.

Dans notre cas, c est non nul.

Fonction de transfert H(p) :

On veut calculer :

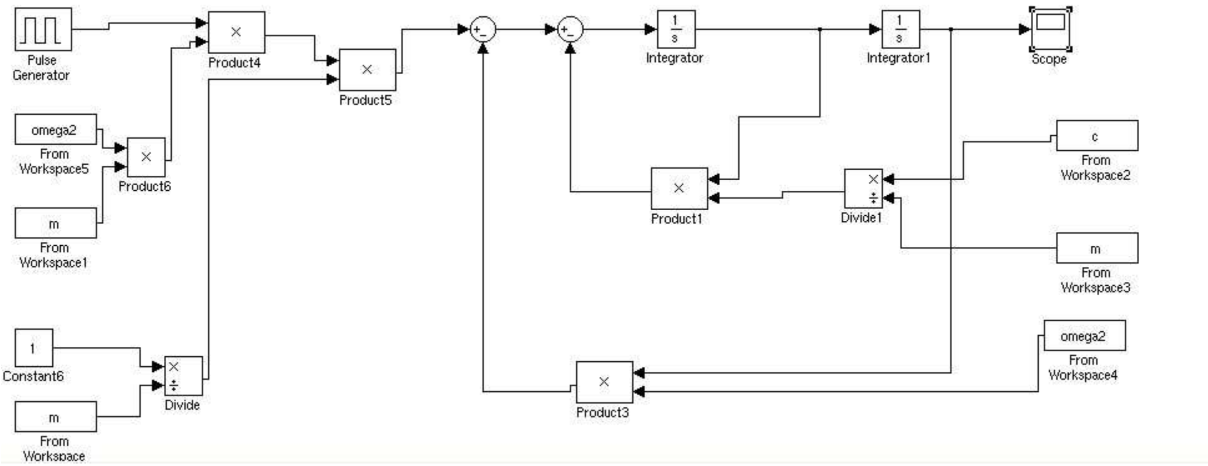
$$H(p) = C(p\,Id - A)^{-1} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & -1 \\ \frac{k}{m} & p + \frac{c}{m} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k}{m} \end{pmatrix}$$ où Id est la matrice identité

Donc

$$H(p) = \frac{k}{p^2 m + pc + k}$$

Résultats

Nous modélisons le problème sous la toolbox Matlab : Simulink. Voici le graphe utilisé (les valeurs des entrées proviennent du Workspace de Matlab où nous avons entré les constantes c, ω^2 et m).



Constantes utilisées (relatives au Pilatus Porter) :

- vitesse d'approche : 111 km/h
- masse : 1286 kg (à vide)

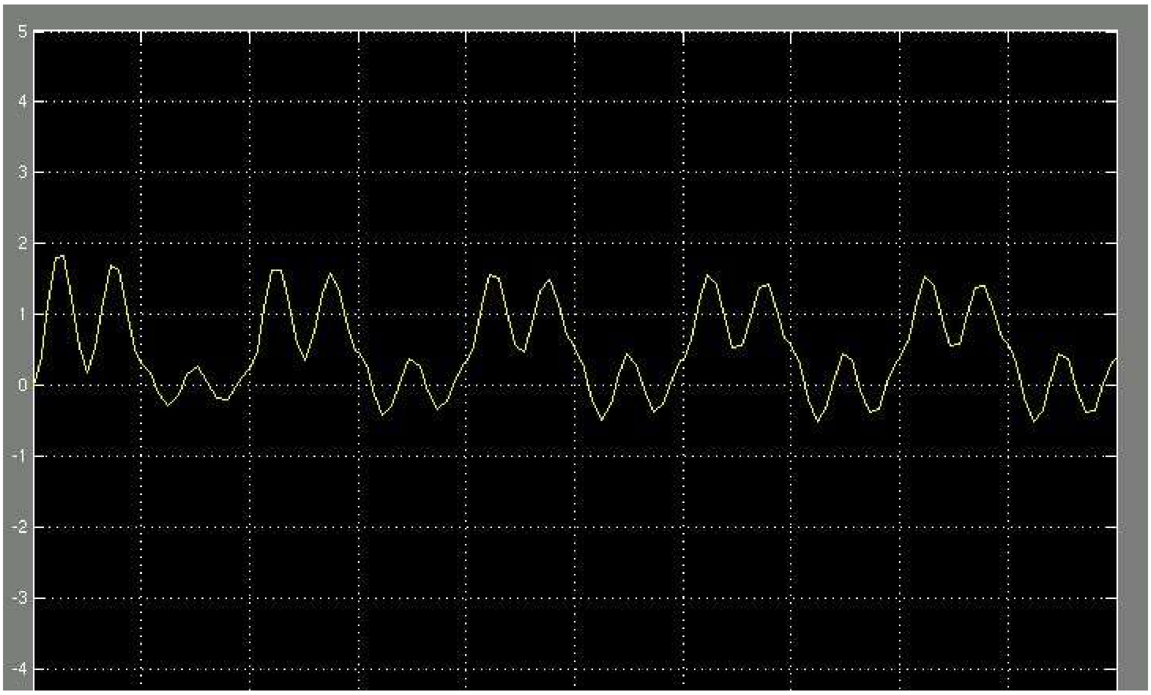
Sa vitesse d'aterrissage est donnée dès lors que l'avion est à moins de 15m du sol. Par ailleurs, on utilisera la fréquence approximative des oscillations de l'amortisseur à 2Hz, et une constante c = 1000.

Il faudra considérer que l'échelle horizontale des graphes obtenus est le temps et non l'espace : il faudrait donc diviser par la vitesse de 111 km/h pour obtenir une échelle en mètre.

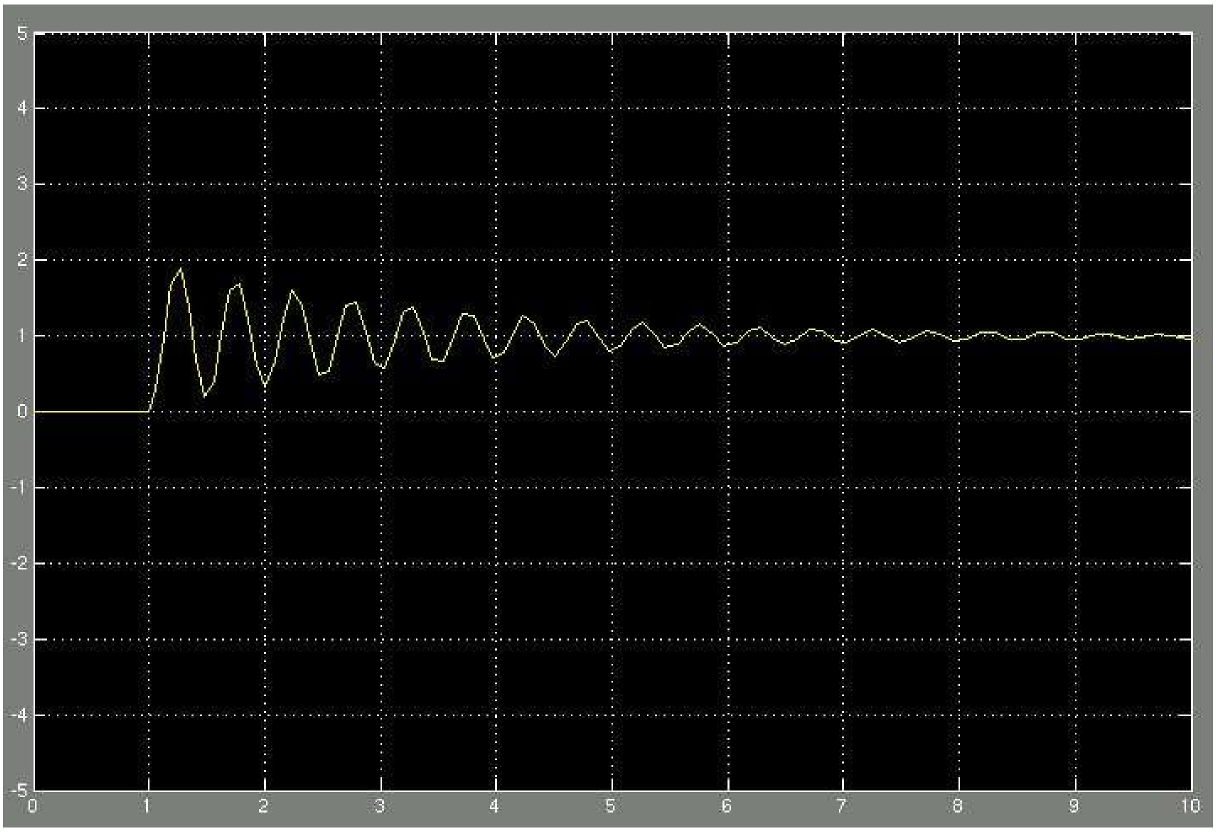
Nous avons ainsi pu définir la réponse à plusieurs formes de pistes différentes.

Il est à noter que, d'après les résultats, une fréquence des oscillations de 2 Hz ne semble pas adéquat, ce qui provient du faible poids de l'avion.

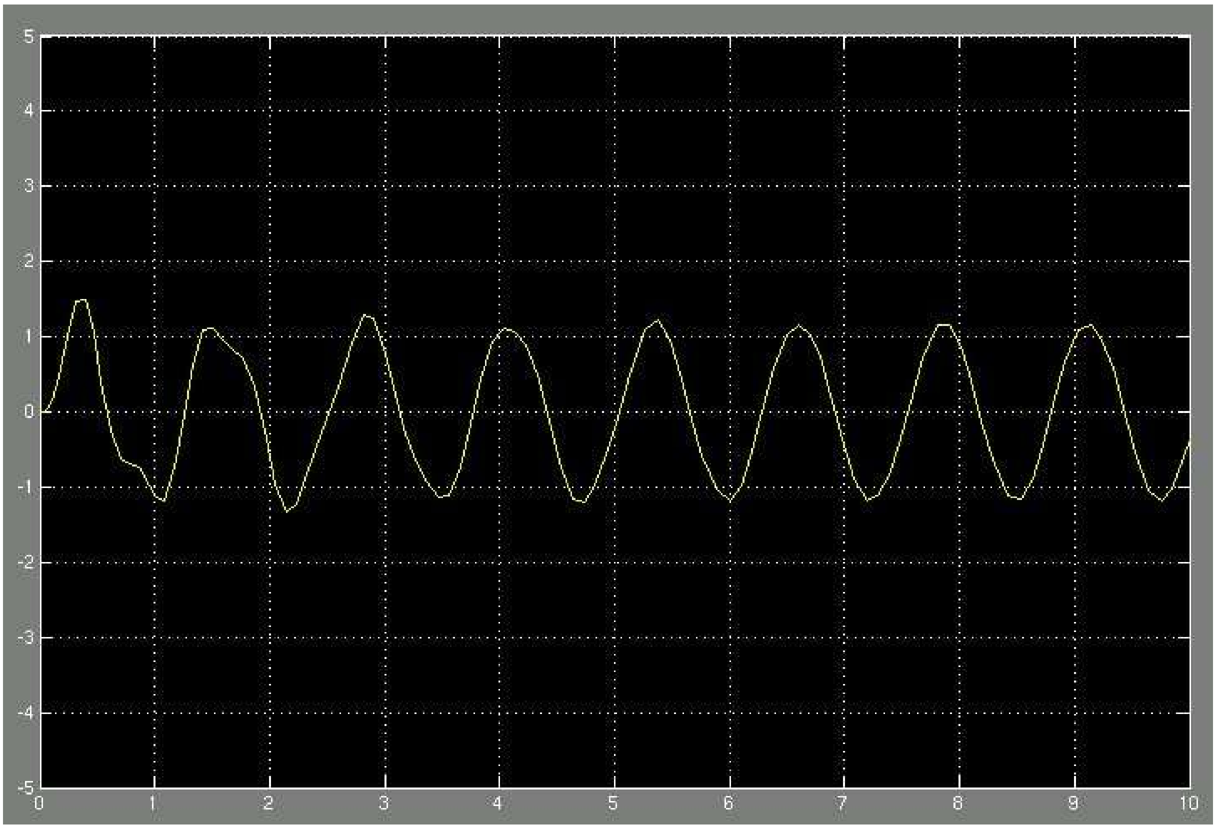
Réponse à une fonction de pulsation en créneau :



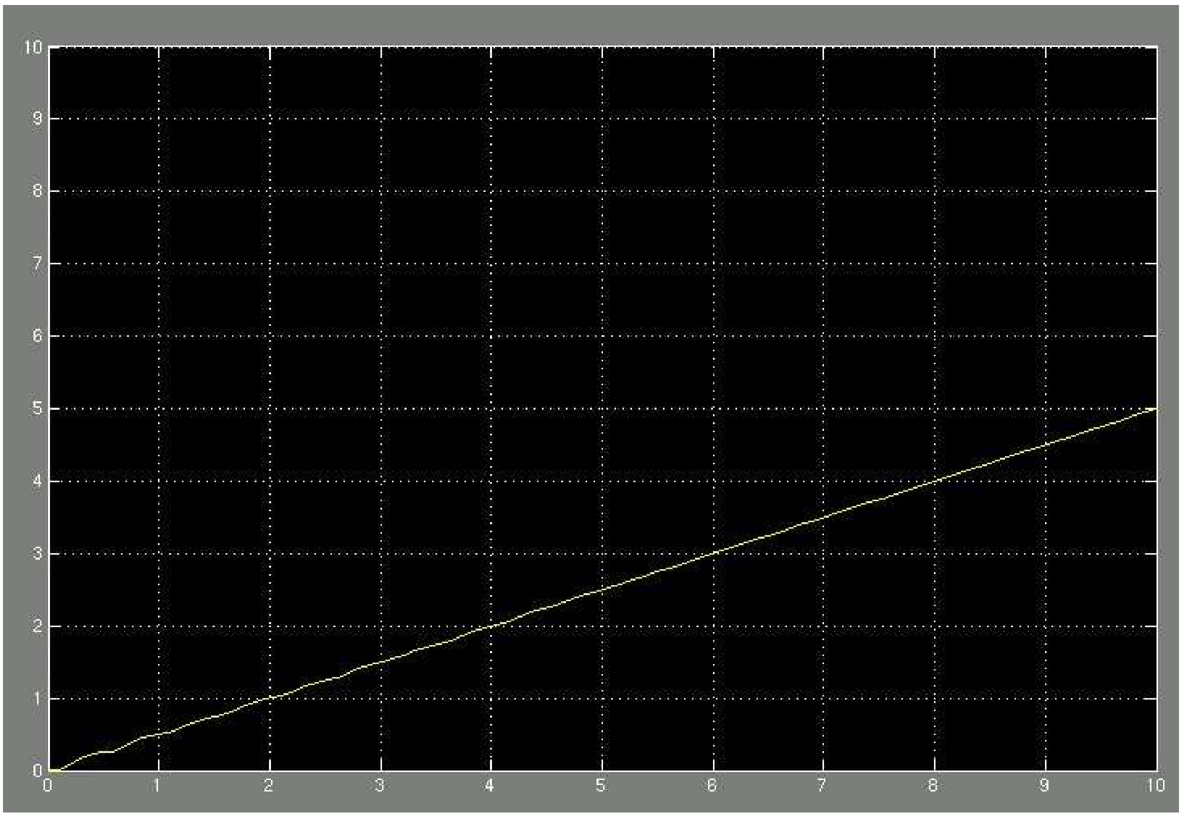
Réponse à une marche :



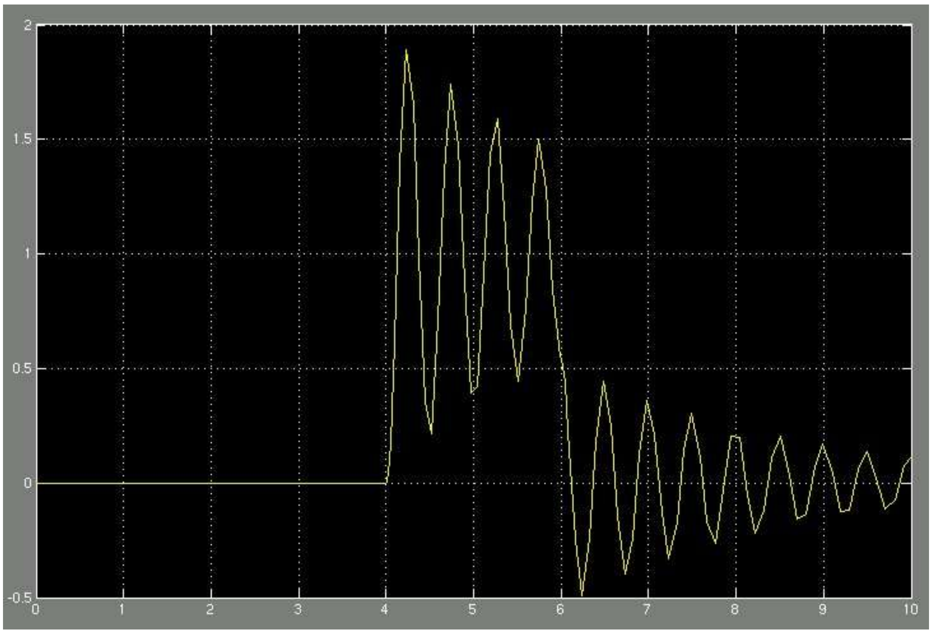
Réponse à un Sinus de 5 rad/s



Réponse à une droite de pente 0.5



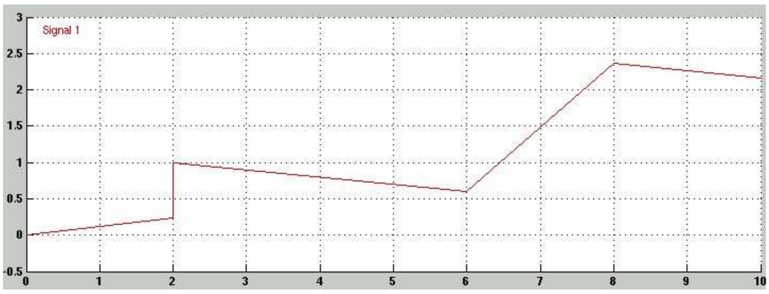
Réponse à une fonction de Kronecker



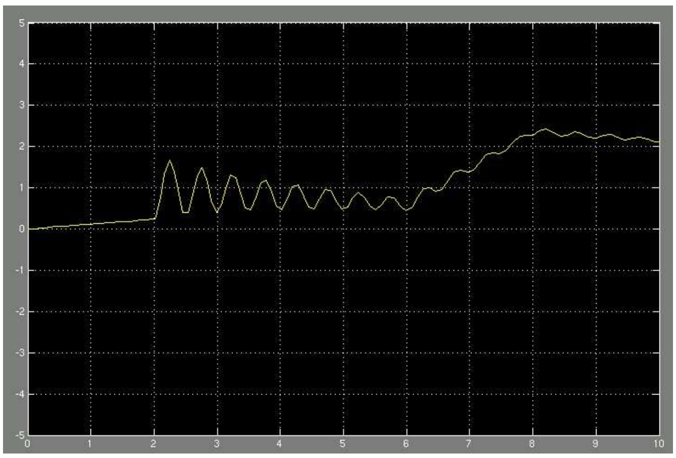
Cette fonction nous permet de simuler la crevaison du pneu de l'avion.

Réponse à un signal construit arbitrairement :

Signal :

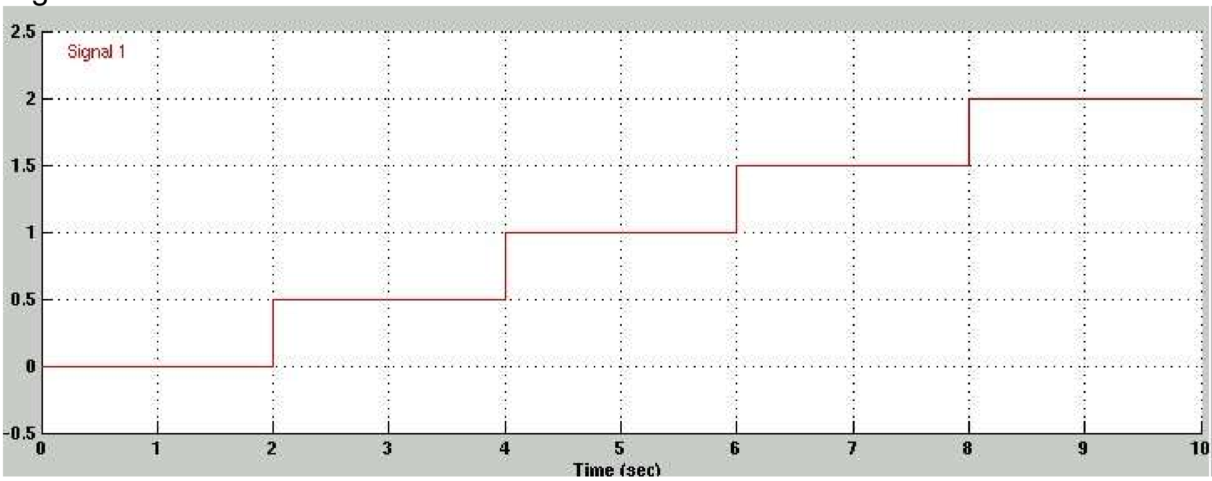


Réponse :

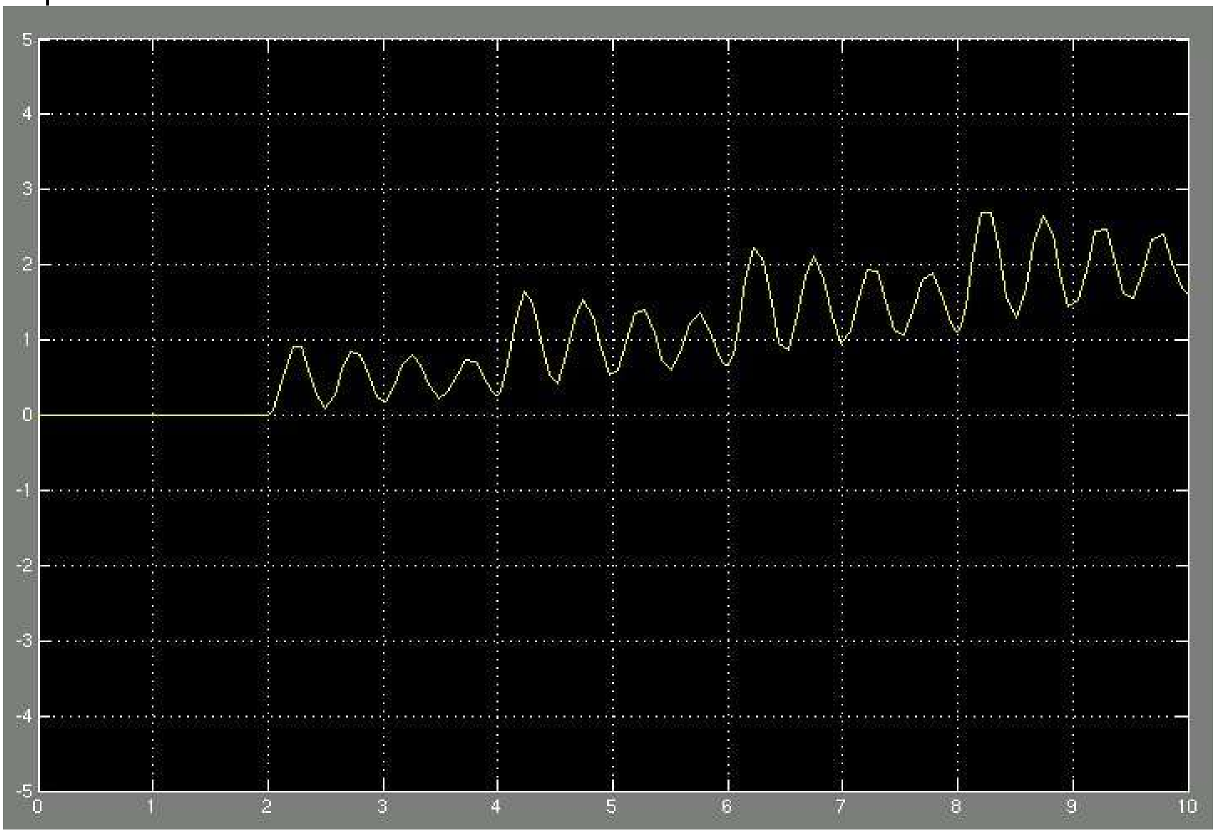


Réponse à une somme de marches :

Signal :

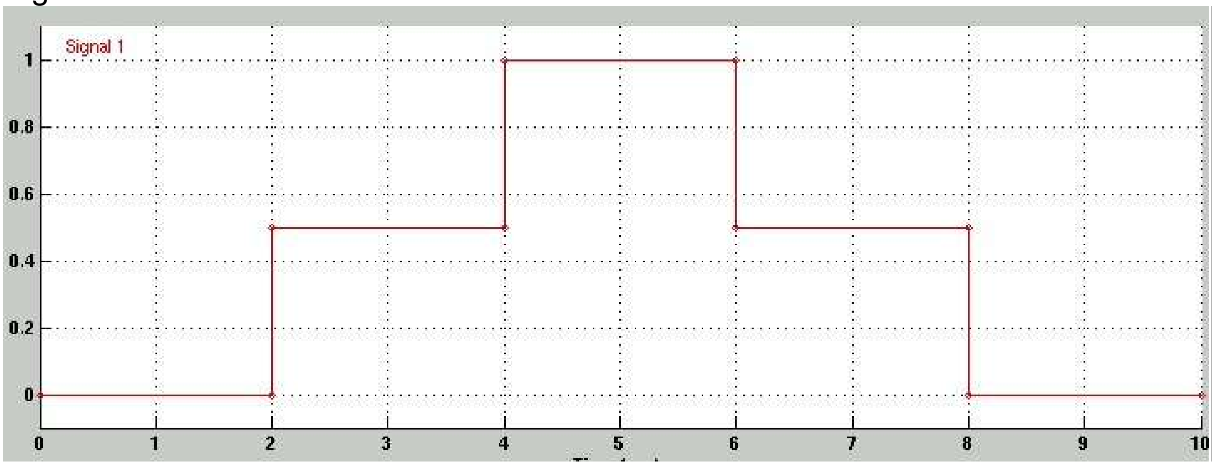


Réponse :

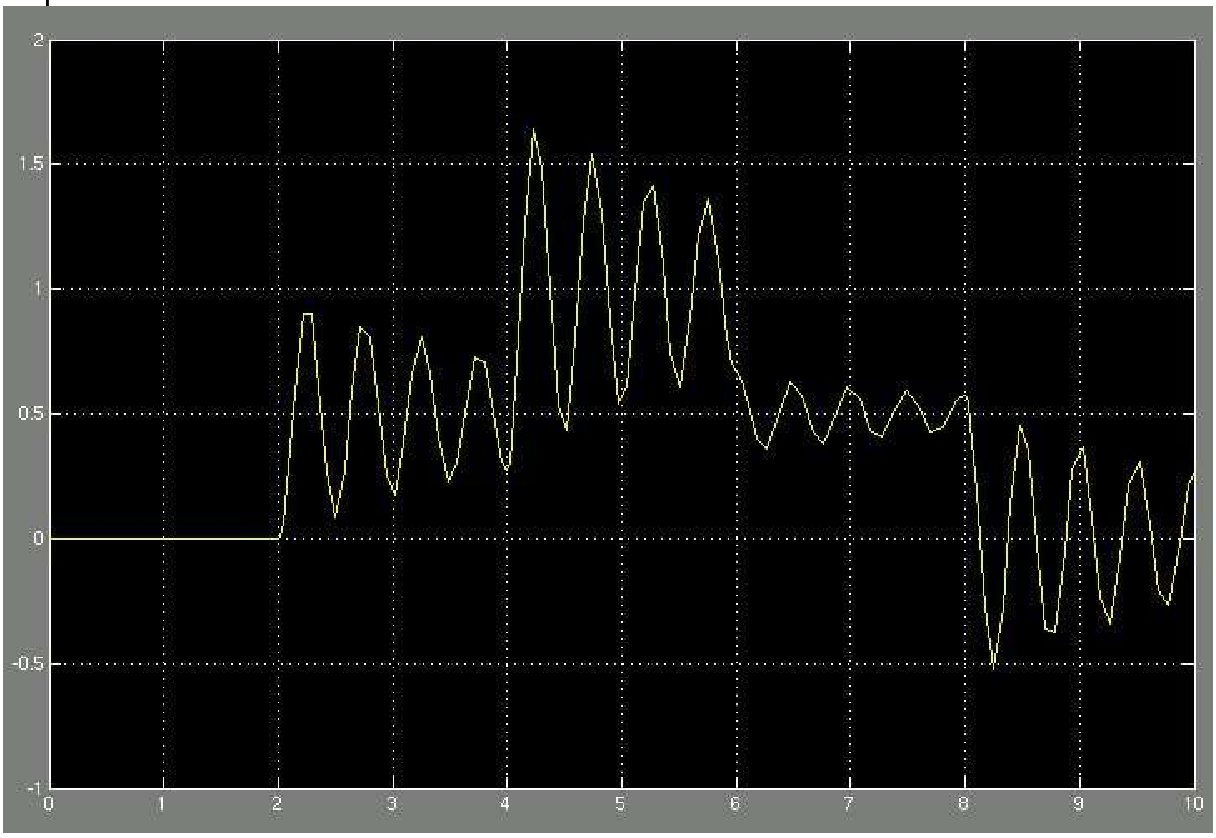


Réponse à une “pyramide”

Signal :

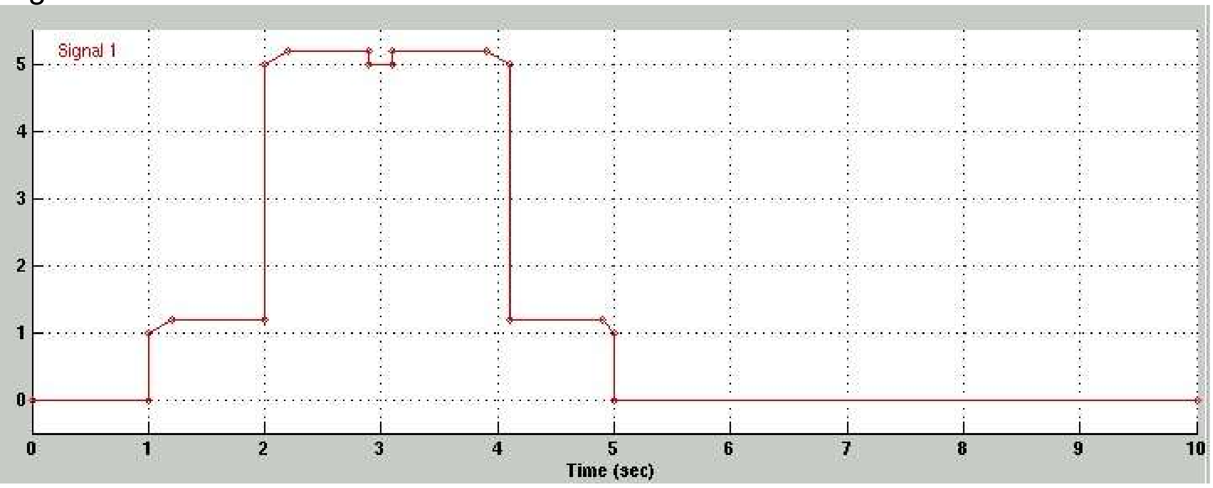


Réponse :

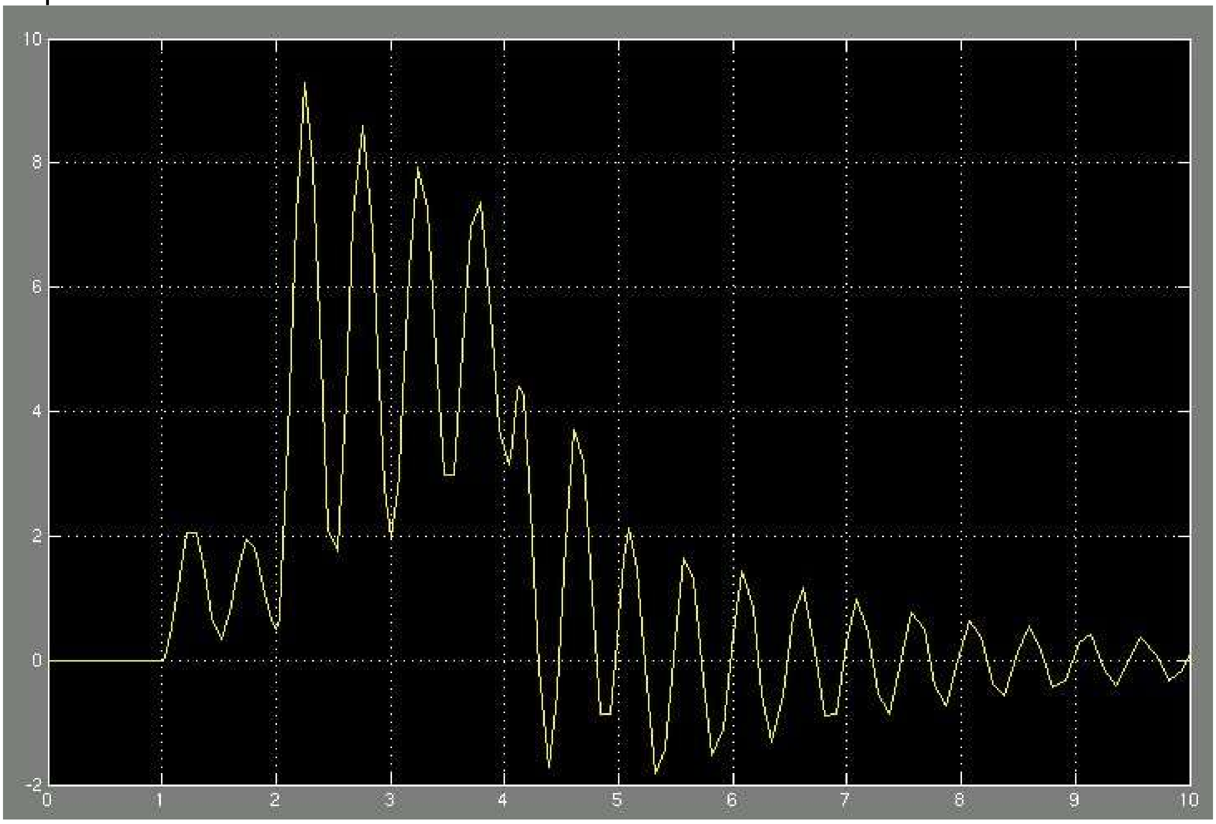


Réponse à une fonction construite non arbitraire

Signal :



Réponse :



Contrôle actif des vibrations

Nous pouvons réduire les vibrations en minimisant l'intégrale : $\int_0^\infty \ddot{z}^2\, dt$

Nous savons que $\ddot{z} = \begin{pmatrix} \frac{k}{m} & \frac{-c}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \dot{z} \end{pmatrix} + \frac{k}{m} f(t)$

Nous pouvons donc majorer l'intégrale souhaitée en utilisant Cauchy-Schwartz :

$$\sqrt{\int_0^\infty \ddot{z}^2} \leq \sqrt{\int \left(\begin{pmatrix} \frac{k}{m} & \frac{-c}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \dot{z} \end{pmatrix} \right)^2 dt} + \sqrt{\int \left(\frac{k}{m} f(t) \right)^2 dt}$$

$$\leq \sqrt{\int \left\| \begin{pmatrix} \frac{k}{m} & \frac{-c}{m} \end{pmatrix} \right\|^2 . X^T\, Id\, X\, dt} + \sqrt{\int \left(\frac{k}{m} \right)^2 . f^T\, Id\, f\, dt}$$

On obtient donc, selon les notations du cours, les matrices R et Q définies par :

$$\begin{cases} R = \left(\frac{k}{m} \right)^2 Id \\ Q = \left\| \begin{pmatrix} \frac{k}{m} & \frac{-c}{m} \end{pmatrix} \right\|^2 Id = \frac{k^2 + c^2}{m^2} Id \end{cases}$$

Ces matrices sont utilisées pour résoudre l'équation de Riccati, que Matlab résoud par la fonction « lqr » qui renvoie $K = R^{-1} B^T S$.
Nous obtenons pour les valeurs numériques précédentes, une matrice :

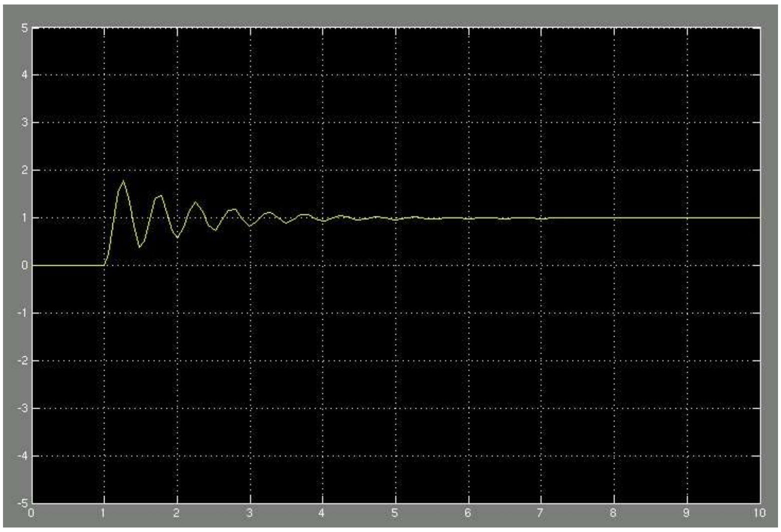
$$K = \begin{pmatrix} 0.4142 & 0.9977 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Selon le cours, la solution pour un contrôle optimal des vibrations est obtenue en appliquant la relation :

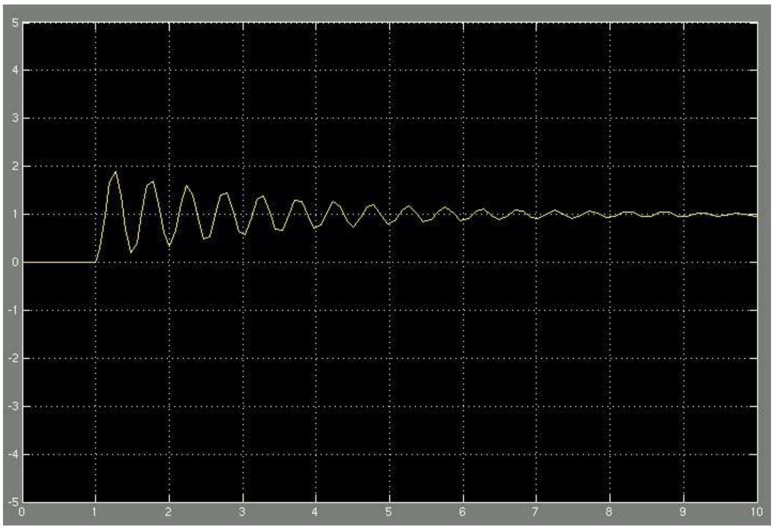
$$\tilde{f}(t) = -K.X$$

Comparaison des résultats sur une fonction “marche”

Résultat <u>avec</u> contrôle actif des vibrations



Résultat <u>sans</u> contrôle actif des vibrations



Nous observons que les oscillations ont donc été amorties par notre contrôle actif des vibrations.